

RAW | RISK AT WORK

REPLICATING PORTFOLIO CONTROL VARIATES: **MINDER SCENARIOS, BETERE UITKOMSTEN.**

By Dr. Alexander van Haastrecht

De marktconsistente waardering van verzekeringsverplichtingen is een van de belangrijkste aspecten binnen Solvency II en IFRS 4 Phase 2. Omdat een zo realistisch mogelijke modellering van onderliggende verzekeringscontracten hierin van groot belang is, hebben simulatiemethoden zich ontwikkeld tot de standaard methode voor de verzekeringsverplichtingen.

Simulatiemethoden bieden een hoge mate van flexibiliteit voor modellering van embedded opties en dynamisch polishoudersgedrag. Een valkuil in het gebruik van simulaties is echter dat de betrouwbaarheid sterk afhangt van het aantal scenarios dat gehanteerd wordt; de wet van de grote aantallen verzekert ons dat de Monte Carlo schatting uiteindelijk naar de werkelijke waarde convergeert, echter in praktijk hebben we helaas maar een eindig aantal scenarios tot onze beschikking. De gevonden schatting voor de waarde van de verplichting bevat dus altijd nog simulatieonzekerheid, die significant kan zijn als er niet voldoende scenarios worden gehanteerd. Om een verwaarloosbare simulatieonzekerheid die nodig is voor hedging en marktwaarde rapportages, is kunnen meer dan 50 duizend scenarios nodig voor verzekeringscontracten

met embedded opties. Vele traditionele actuariële systemen kunnen een dergelijk hoog aantal momenteel niet aan. Een alternatieve manier om de nauwkeurigheid van Monte Carlo schattingen te verbeteren, is om variantiereductietechnieken toe te passen. Deze methoden verbeteren de simulatiebetrouwbaarheid, terwijl geen additionele scenarios gebruikt hoeven te worden. Een veelgebruikte variantiereductietechniek is de control variate.

In dit artikel wordt dieper ingegaan op hoe het gebruik van Replicating Portfolios als control variates grote verbeteringen kan opleveren voor de stabiliteit en nauwkeurigheid van marktwaarde rapportages en hedge gevoeligheden, zonder dat hiervoor extra scenarios benodigd zijn.

“Variantiereductietechnieken verbeteren de simulatie betrouwbaarheid terwijl geen additional scenarios gebruikt hoeven te worden”

Control Variates

De waarde van een verzekeringsverplichting wordt doorgaans bepaald als gemiddelde over alle simulatiepaden. Dit levert de eenvoudigste schatting op voor de waarde van de verzekeringsverplichting, maar is niet de meest efficiënte manier om met de simulatieuitkomsten om te gaan.

Zo neemt de standaard schatter geen enkele informatie mee over de waardering van aanverwante financiële instrumenten, als zero-coupon bond of aandelenprijzen; dit terwijl als de zero-coupon bond prijs te hoog uit te scenarios komt, dan zal ook een vaste kasstroom te hoog gewaardeerd worden. Idem dito is de waarde van een garantie op aandelenfondsen 1 op 1 gerelateerd aan de gesimuleerde waarde van aandelen put opties.

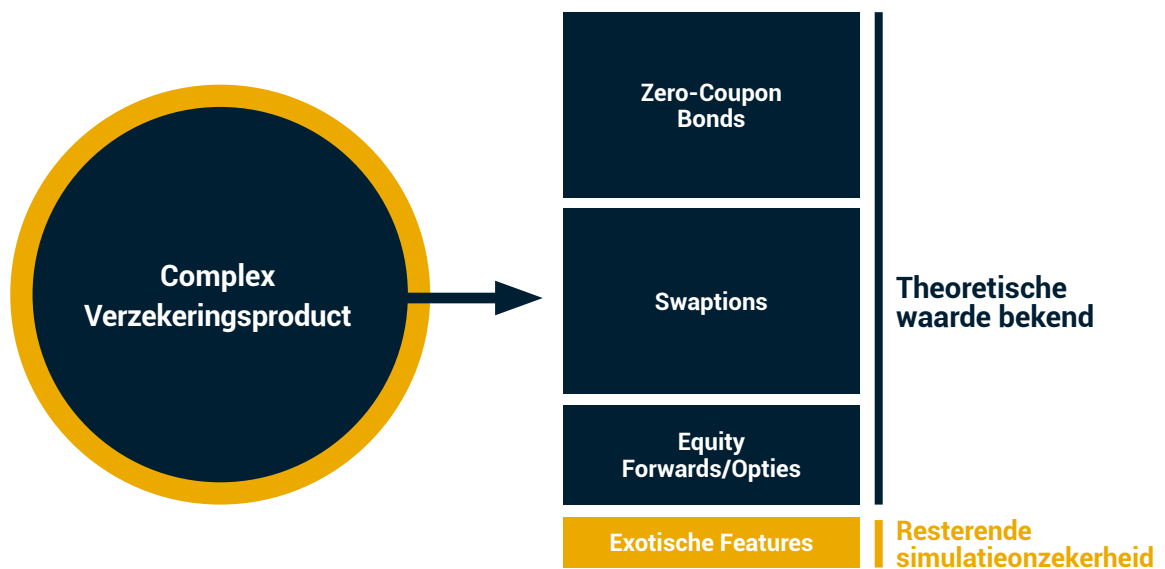
Control Variates zijn wel in staat waarderingsinformatie over een portefeuille van gerelateerde financiële instrumenten op een nette manier te betrekken in de waardering van een onderliggende verzekeringsproducten; control variates corrigeren nameijk voor bekende onder- of overschattingen in soortgelijke financiële producten, en verbeteren hiermee de betrouwbaarheid voor de waardering van een onderliggende verzekeringsproducten.

The control variate schatter van een verzekeringsverplichting wordt gegeven door de volgende vergelijking:

$$\underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_{sim}(i)}_{\text{Standaard Schatter}} - b \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (RP_{sim}(i) - RP_{theo})}_{\text{Control Variate Aanpassing}}$$

waarbij $L_{sim}(i)$ de constante waarde van de verzekeringsverplichting is voor simulatie i , en $RP_{sim}(i)$, RP_{theo} respectievelijk de gesimuleerde waarde en de theoretische waarde van de Replicating Portfolio. In vergelijking tot de standaard schatter, voegt de control variate een additionele term toe (de control), die corrigeert voor bekende simulatie fouten. De mate van correctie wordt bepaald door de constante b en is afhankelijk van de hoogte van de correlatie tussen de Control Portefeuille en de verzekeringsverplichting.

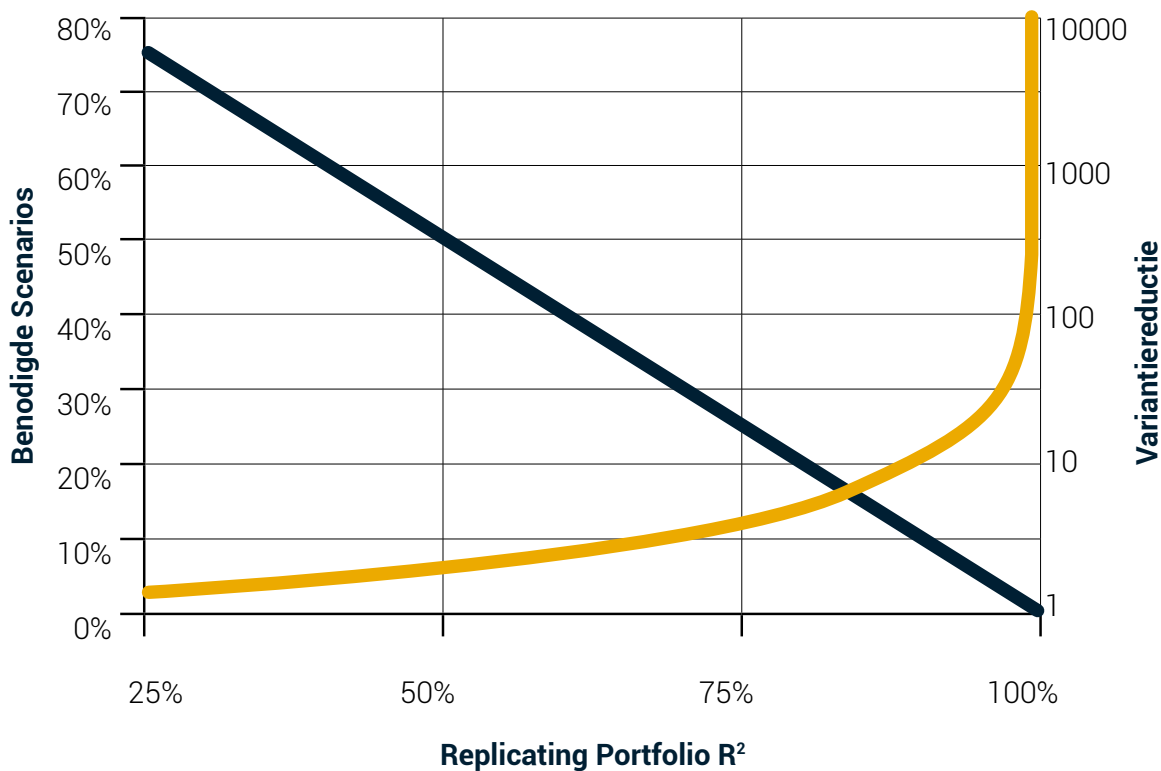
De beste control variate voor een onderliggende verzekeringsverplichting is de Replicating Portfolio; dit is een portefeuille van financiële instrumenten met als doel zoveel mogelijk marktrisico-karakteristieken van het verzekeringsproduct te repliceren, zie ook Figuur 1;



Figuur 1: Schematisch overzicht van Replicating Portfolios als Control Variate:

- **Links: Standard Monte Carlo schatting met simulatie-onzekerheid over alle uitkomsten.**
- **Rechts: Control Variate die simulatie-onzekerheid met de Replicating Portfolio grotendeels elimineert.**

Het gebruik van control variates geeft altijd een betrouwbaarder antwoord dan de standaard schatter, waarbij de effectiviteit wel afhangt in hoeverre de Replicating Portfolio in staat is de totale variabiliteit van het onderliggende verzekeringsproduct te verklaren; des te hoger de R^2 , des te beter de control variate, zie Figuur 2.



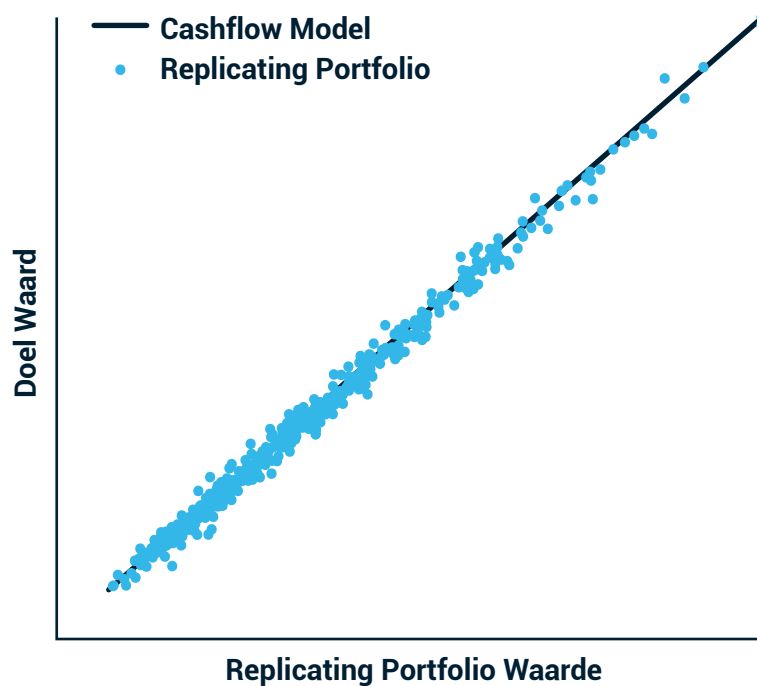
Figuur 2: Benodigd aantal scenarios (percentage)/ verbeteringsfactor ten opzichte van de out-of-sample R^2 van de Replicating Portfolio.

Hieruit volgt dat een replicating portfolio met een out-of-sample R^2 van 90% een verbetering van een factor 10 oplevert,

terwijl een replicating portfolio met een R^2 van 99% zelfs een verbetering van een van een factor 100 geeft.

Praktijk Voorbeeld

Het gebruik van Replicating Portfolio Control Variates zal in deze sectie worden toegepast op een unit-linked portefeuille met individuele minimum rendementsgaranties. De onderliggende replicating portfolio bestaat uit zero-coupon bonds, forwards en put opties op de onderliggende beleggingsfondsen.



Figuur 3: Scatterplot van het Cashflow Model vergeleken met de Replicating Portfolio.

De scatterplot van de replicatie in Figuur 3 demonstreert dat de Replicating Portfolio een groot gedeelte van de variabiliteit van de marktrisico's van het verzekeringsproduct weet te verklaren.

De out-of-sample R2 is gelijk aan 99.4% en resulteert hiermee in een zeer goede control variate voor de verplichtingswaarde, zie ook Tabel 1;

	Simulatie- onzekerheid (%)	Equivalent aantal scenarios
1,000 scenarios	6,9%	1,000
1,000 scenarios + control variate	0,5%	182,000

Tabel 1: Behaalde verbeteringen bij gebruik van control variate voor Unit-Linked garanties.

“Het gebruik van control variates geeft altijd een betrouwbaarder antwoord dan de standaard schatter”

Uit deze resultaten volgt dat de nauwkeurigheid van de Replicating Portfolio Control Variate uitkomsten bij 1,000 scenarios gelijk is aan het gebruik van 182,000 normale scenarios zonder control variate. De simulatie-onzekerheid bij 1,000 scenarios neemt hiermee af van 6.9% tot 0.5% van de waarde van de

verzekeringsverplichting. Het gebruik van control variates leidt dus tot grote verbeteringen in de stabiliteit en nauwkeurigheid van marktwaarde rapportages en berekening van hedge gevoeligheden, zonder dat hiervoor extra scenarios benodigd zijn.

Index

This article was originally published in The Actuary (June 2011)



Dr. Alexander van Haastrecht

- Partner Risk At Work.

Alexander has Ph.D. in Financial Mathematics from the University of Amsterdam. After finishing his Ph.D. he started a part-time position at the VU Amsterdam as assistant-professor and started Risk-at-Work and he's still active in both roles. Affected by a small streak of OCD, when Alexander isn't working or spending time with his family, you'll probably find him doing strength training, running or playing tennis.

RAW | RISK AT WORK

Who we are

At Risk-at-Work we specialize in making models and providing solutions for quantitative risk management, trading and ALM topics. We pride ourselves on cutting through complexity by providing creative and practical solutions for hard problems. We do this by having a wealth of practical experience, state-of-the-art technical knowledge but first and foremost by understanding our clients' and their problems and co-creating solutions with them that work.

What we do

Our client list covers all major Dutch financial institutions. We help our clients to get better, to go further. We help on topics where we believe we can offer unsurpassable quality. This means that we often work on topics that are on the intersection of quantitative finance, risk management and ALM. On these topics, we can help with providing insight, develop and implement models, review and improve models or just analyze understand data.

 www.riskatwork.nl  info@riskatwork.nl
