

TOEPASSING LEAST SQUARES MONTE CARLO OP UNIT LINKED MET EINDGARANTIE



Dr. Alexander van Haastrecht is eigenaar van Van Haastrecht Consultancy.



Dr. Richard Plat AAG RBA is eigenaar van Richard Plat Consultancy.

Voor het bepalen van de Solvency Capital Requirement (SCR) voor marktrisico en voor de verschillende waarderingen in het kader van Market Consistent Embedded Value (MceV) en de toereikendheidstoets zijn een groot aantal waarderingen van de embedded opties in de verzekeringsportefeuille vereist. Een alternatief voor analytische waardering van deze embedded opties of de 'replicating portfolio' techniek is Least Squares Monte Carlo (LSMC). In dit artikel werken Richard Plat en Alexander van Haastrecht deze techniek bij wijze van voorbeeld uit voor een Unit Linked (UL) product met eindgarantie. Het voorbeeld laat zien dat LSMC redelijk goede schattingen oplevert van de waarde van de eindgarantie. Niet alle verzekeraars hebben echter projectiesystemen beschikbaar die zonder meer het benodigde aantal fitting scenario's aankunnen.

Achtergrond

In Plat (2012, De Actuaris) is het 'nested simulations' probleem genoemd, wat als gevolg heeft dat verzekeraars in het kader van bijvoorbeeld Solvency II tienduizenden keren de waarde van de embedded opties in hun verzekeringsportefeuille moeten kwantificeren ter bepaling van de Solvency Capital Requirement (SCR). LSMC is een recent ontwikkelde techniek (zie ook Bauer et al (2010) en Koursaris (2011)) om deze waarderingen op praktische en snelle wijze te kunnen doen. Echter, de techniek heeft ook zijn nadelen (zie Plat (2012)). In dit artikel wordt de techniek toegepast op een UL product met eindgarantie om te beoordelen hoe de techniek in de praktijk werkt en wat de kwaliteit van de benadering is voor een representatief verzekeringsproduct.

Voorbeeld

Het voorbeeld betreft een UL polis met een looptijd van 10 jaar. Gedurende 10 jaar wordt ieder jaar een premie van € 10.000 gestort. Deze worden voor 40% belegd in aandelen en 60% in vastrentende waarden. De polis kent een garantie op einddatum, die bepaald wordt door de premies met 3% op te renten tot einddatum. De uitbetaling van de eindgarantie kan als volgt worden geschreven:

$$\text{Max}\{K - \text{fondswaarde}_{t=10}, 0\} = \text{Max}\left\{K - \sum_{i=0}^9 P_i \left(\frac{S_{t_{10}}}{S_t}\right), 0\right\} \quad (1)$$

met P_j de toekomstige premies, S_{t_j} de waarde van het onderliggende fonds op tijdstip t_j en K het gegarandeerde bedrag op einddatum.

Aanpak

LSMC is in essentie vergelijkbaar met 'nested simulations': voor een aantal real world scenario's wordt de waarde van de verplichtingen bepaald op basis van Monte Carlo simulatie. Echter, in dit geval wordt bijvoorbeeld maar één scenario gebruikt voor de waardering van de embedded opties. Dit levert per

scenario uiteraard zeer onnauwkeurige waarderingen van de verplichtingen op. Echter, door al deze onnauwkeurige inschattingen wordt een regressie functie gefit. In deze regressie functie kunnen alle gewenste risicofactoren (zoals bijvoorbeeld korte rente, lange rente, aandelenkoersen, etc) opgenomen worden als verklarende variabelen.

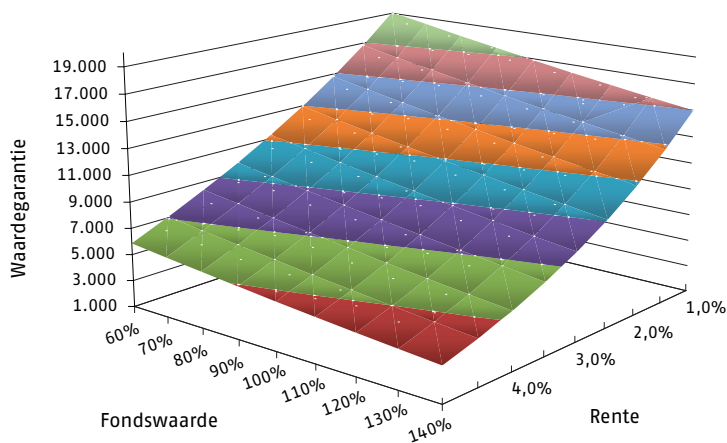
In dit artikel kijken we naar de resultaten van het fitten op een totaal van respectievelijk 1.000, 10.000, 20.000 en 40.000 scenario's. Hierbij zijn real world scenario's gesimuleerd op $t=1$ en is per real world scenario de waarde van de eindgarantie bepaald op basis van één risiconeutraal scenario. Als regressiefunctie gaan we uit van een derdegraads polynoom, met de fondswaarde S en de 9-jaars zero rente R als verklarende variabelen. Voor deze verklarende variabelen is gekozen omdat de huidige fondswaarde en de rente over de betreffende periode de belangrijkste determinanten zijn van de waarde op $t=1$ van de eindgarantie. De regressiefunctie ziet er als volgt uit:

$$\text{Waarde Eindgarantie} = C + \sum_{i=1}^3 a_i S^i + \sum_{j=1}^3 b_j R^j$$

waarbij C , a_j en b_j de te schatten constanten zijn. De schatting is verricht middels de kleinste kwadraten methode.

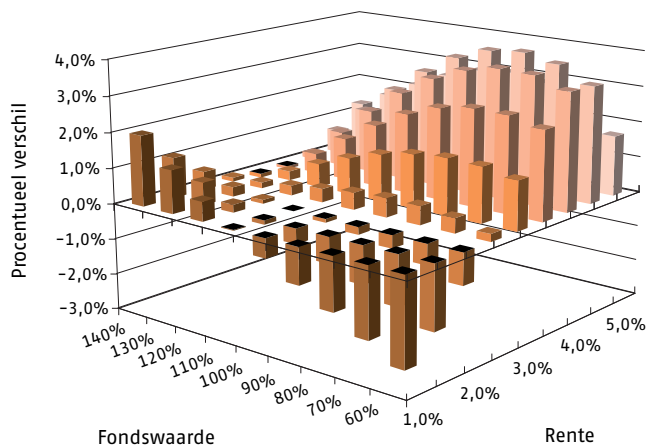
Resultaten

De resultaten van de regressie zijn vergeleken met resultaten op basis van Monte Carlo simulatie (10.000 scenario's) voor een aantal combinaties van fondswaarde (60% tot 140% in stappen van 10%) en rente (1% tot 5% in stappen van 0,5%). Figuur 1 laat de waarde van de garantie zien voor deze combinaties op basis van de aan 40.000 scenario's gefitte regressiefunctie.



Figuur 1: waarde eindgarantie obv gefitte regressiefunctie

Conform verwachting is de waarde van de eindgarantie hoog bij een combinatie van lage fondswaarde en lage rente. Daarnaast laat de figuur zien dat de waarde van de garantie gevoeliger is voor het niveau van de rente dan voor de hoogte van de fondswaarde. Figuur 2 laat de procentuele verschillen zien tussen de resultaten van de regressiefunctie en Monte Carlo simulatie.



Figuur 2: procentuele verschil regressiefunctie tov Monte Carlo simulatie

De figuur laat zien dat de procentuele afwijking ten opzichte van Monte Carlo simulatie voor de verschillende combinaties tussen -2,5% en + 3,8% ligt.

Merk op dat de uitkomsten van Monte Carlo simulatie ook (simulatie)onzekerheid kennen. Deze onzekerheid wordt kleiner als het aantal scenario's vergroot wordt, echter deze kan aanzienlijk zijn als er slechts een beperkt aantal scenario's wordt toegepast (zonder gebruik te maken van variantiereductietechnieken). Het 99% betrouwbaarheidsinterval van het Monte Carlo resultaat voor de verschillende combinaties ligt bij 10,000 scenario's tussen de 2 en 5%. Van de 81 onderzochte combinaties van fondswaarde en rente ligt voor 78 combinaties de LSMC schatting binnen het 99% betrouwbaarheidsinterval.

Gezien bovenstaande levert LSMC redelijk goede schattingen op van Monte Carlo resultaten. Echter, er zijn wel 40.000 simulaties nodig voor het fitten van de regressiefuncties. Dit lijkt noodzakelijk voor een goed resultaat omdat de regressie-functie direct de waarde van de embedded optie schat: het gebruik van een te laag aantal scenario's zorgt voor te veel ruis in deze schatting. Voor sommige verzekeraars zal dit aantal simulaties praktisch lastig uitvoerbaar zijn vanwege lange runtijden van de projectiemodellen. In tabel 1 staat het gemiddelde (over de 81 combinaties) van de absolute waarden van de procentuele verschillen tussen LSMC en Monte Carlo simulatie, voor verschillende aantallen van gehanteerde simulaties voor het fitten.

Fitting scenario's	Gemiddeld % afwijking
1.000	5,5%
10.000	2,2%
20.000	1,9%
40.000	1,6%

Tabel 1: gemiddeld % afwijking bij verschillende aantal fitting scenario's

De tabel laat zien dat de gemiddelde afwijking voor 10.000 en 20.000 fitting scenario's nog enigszins binnen de perken blijft. Voor 1.000 fitting scenario's is de kwaliteit niet goed genoeg: de gemiddelde afwijking ligt significant hoger en voor enkele scenario's is de afwijking meer dan 15%.

Conclusie

In dit artikel is de LSMC techniek bij wijze van voorbeeld uitgewerkt voor een Unit Linked product met eindgarantie. Het voorbeeld laat zien dat LSMC redelijk goede schattingen oplevert van de waarde van de eindgarantie. Hier zijn echter wel veel fitting scenario's voor nodig. Niet alle verzekeraars hebben projectiesystemen beschikbaar die dit zonder meer aankunnen. Het gebruik van meer complexe regressiefuncties op basis van bijvoorbeeld Legendre, Hermite en Chebyshev polynomen zou de resultaten wellicht nog kunnen verbeteren. ◀◀



Referenties

BAUER, D., D. BERMANN EN A. REUSS. (2010): Solvency 2 and Nested Simulations – a Least Squares Monte Carlo Approach, *working paper*

KOURSARIS, A. (2011): The advantages of Least Squares Monte Carlo, *Barrie & Hibbert Insights*

PLAT, R. (2012): Least Squares Monte Carlo: een alternatief voor replicating portfolios en analytische waardering?, *De Actuaris*