



## Efficiënte gevoeligheidsanalyse embedded option waardering

In dit artikel is een techniek beschreven op basis waarvan op efficiënte wijze gevoeligheidsanalyses uitgevoerd kunnen worden van de waarde van de embedded opties in verzekerings- en pensioencontracten, waardoor potentieel veel doorlooptijd en rekencapaciteit bespaard kan worden.

### ACHTERGROND

De marktwaarde van verplichtingen kan bepaald worden door middel van discontering van de toekomstige kasstromen met een risicovrije rentecurve. Echter, verzekerings- en pensioencontracten bevatten vaak ook conditionele elementen, ook wel embedded opties genoemd. Deze embedded opties dienen gewaardeerd te worden op basis van risiconeutrale waardering. Gezien de complexiteit van de (vaak pad-afhankelijke) embedded opties in verplichtingen, wordt dit veelal met Monte Carlo simulatie uitgevoerd. Het uitgangspunt bij de scenario's die hierbij gebruikt worden is dat deze arbitragevrij zijn: het is niet mogelijk om een gegarandeerde positieve cashflow te genereren zonder initiële investering. Daartoe zijn de scenario's zodanig geconstrueerd en gekalibreerd dat de verwachte waarden van verhandelbare beleggingen (obligaties, aandelenopties, swaptions) op basis van deze scenario's gelijk zijn aan de huidige marktprijs.

In de praktijk is er behoefte aan analyses van de gevoeligheid van de waarde van de embedded opties voor bijvoorbeeld hedging doeleinden of om inzicht te verkrijgen in de impact van de verschillende aannames onderliggend aan de waardering. Omdat voor iedere gevoeligheid een nieuwe scenario set gegenereerd moet worden, en ook de kasstromen opnieuw bepaald moeten worden, kan het doorrekenen van een groot aantal gevoeligheden veel doorlooptijd en rekencapaciteit vergen. In dit artikel wordt een techniek beschreven waarbij de scenario's en kasstromen van de basis berekening hergebruikt kunnen worden, en als gevolg daarvan potentieel veel doorlooptijd en rekencapaciteit bespaard kan worden.

### SCENARIOEWEGING

In onderstaande beschrijven we (een vector met) risico-drivers als een tijdpad van stochastische variabelen  $\mathbf{X}_t := (X_{\Delta t}, X_{2\Delta t}, \dots, X_{J\Delta t})$  met kansverdeling  $f_{\theta}(\mathbf{X}_t)$ , waar  $\theta$  één of meerdere parameters in de formule van de kansverdeling representeert. De "payoff" van een post op de balans (of de waarde van de gehele balans) is gegeven door een functie  $G(\mathbf{X}_t)$  die iedere realisatie van (het tijdpad van) de risico-drivers vertaalt in een verdisconteerde waarde van de cashflows langs dat pad. De waarde op  $t = 0$  wordt bepaald als de risiconeutrale verwachting van de verdisconteerde cashflows  $\mathbb{E}[G(\mathbf{X}_t)]$ .

Vaak is de functie  $G(\mathbf{X}_t)$  complex, denk aan levensverzekeringen met winstdeling of pensioenproducten met indexatie- en kortingsopties. De risiconeutrale waarde  $\mathbb{E}[G(\mathbf{X}_t)]$  wordt dan benaderd met Monte Carlo simulatie. Dit betekent dat een groot aantal ( $N$ ) trekkingen  $\mathbf{x}_{t,n}$  voor de risico-drivers  $\mathbf{X}_t$  uit de kansverdeling  $f_{\theta}(\mathbf{X}_t)$  gedaan wordt. Voor iedere trekking wordt de verdisconteerde payoff  $G(\mathbf{x}_{t,n})$  bepaald, met  $\mathbf{x}_{t,n} := (x_{\Delta t,n}, x_{2\Delta t,n}, \dots, x_{J\Delta t,n})$ . De verwachting wordt vervolgens benaderd als:

$$\mathbb{E}[G(\mathbf{X}_t)] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N G(\mathbf{x}_{t,n})$$

Vanuit numeriek oogpunt is het normaliter kostbaar om de payoff  $G(\mathbf{X}_t)$  te bepalen voor ieder scenario-pad  $\mathbf{x}_{t,n}$ , vooral als het gaat om pad-afhankelijke kasstromen en/of complexe stochastische processen.

In een risicomanagement setting zijn we niet alleen geïnteresseerd in de 'best estimate' waarde met kansverdeling  $f_{\theta}(\mathbf{X}_t)$ , maar ook in analyse van de impact van een gevoeligheid op de geschokte kansverdeling  $f_{\theta+\delta}(\mathbf{X}_t)$ , waarbij  $\delta$  de impact representeert van de veronderstelde gevoeligheid op de kansverdeling van het risk-driver proces  $\mathbf{X}_t$ . Een simpele aanpak om de impact te bepalen is om opnieuw een groot aantal trekkingen  $\mathbf{x}_{t,n,\delta}$  te doen, waar  $\delta$  aangeeft dat de trekking gedaan wordt uit de geschokte kansverdeling  $f_{\theta+\delta}(\mathbf{X}_t)$ . Echter, dit is een kostbare aanpak in termen van doorlooptijd en rekencapaciteit, vanwege de complexiteit van het bepalen van  $G(\mathbf{X}_t)$  voor ieder scenario  $n$ .

Een alternatieve en meer efficiënte aanpak is om de originele trekkingen en bijbehorende verdisconteerde payoffs  $G(\mathbf{x}_{t,n})$  te hergebruiken en het gewicht van ieder scenario  $n$  te wijzigen om de geschokte kansverdeling  $f_{\theta+\delta}(\mathbf{X}_t)$  te reflecteren. De aangepaste gewichten worden als volgt bepaald. De originele verwachting kan gerepresenteerd worden als een (multivariate) integraal van de payoff en de corresponderende kansverdeling:

$$\mathbb{E}[G(\mathbf{X}_t)] = \int G(\mathbf{X}_t) f_{\theta}(\mathbf{X}_t) dF_{\theta}(\mathbf{X}_t) \approx \sum_{n=1}^N G(\mathbf{x}_{t,n}) \frac{1}{N}$$

De laatste term is de Monte Carlo benadering van de integraal, waarbij  $1/N$  de kansmassa van ieder scenario-pad zoals getrokken uit de distributie  $F_{\theta}(\mathbf{X}_t)$  representeert.

De geschokte verwachting kan als volgt geschreven worden:

$$\mathbb{E}_{\delta}[G(\mathbf{X}_t)] = \int G(\mathbf{X}_t) \frac{f_{\theta+\delta}(\mathbf{X}_t)}{f_{\theta}(\mathbf{X}_t)} dF_{\theta}(\mathbf{X}_t) \approx \sum_{n=1}^N G(\mathbf{x}_{t,n}) \frac{f_{\theta+\delta}(\mathbf{x}_{t,n})}{f_{\theta}(\mathbf{x}_{t,n})} \frac{1}{N}$$

De verwachting onder de geschokte kansverdeling  $f_{\theta+\delta}(\mathbf{X}_t)$  kan dus bepaald worden op basis van de originele scenario-paden  $\mathbf{x}_{t,n}$  en de bijbehorende payoffs  $G(\mathbf{x}_{t,n})$ , maar met een aangepast gewicht voor ieder scenario. De aanpassing is gelijk aan de zogenaamde 'likelikhoud ratio'  $R_n := f_{\theta+\delta}(\mathbf{x}_{t,n}) / f_{\theta}(\mathbf{x}_{t,n})$ , die voor elke scenario-pad  $n$  de verhouding van kansverdelingen vóór en na de schok representeert. Afhankelijk van de complexiteit van de stochastische processen kan deze likelikhoud ratio op analytische wijze bepaald worden of kunnen aangepaste gewichten  $R_n$  met numerieke methoden bepaald worden. Bovenstaande is in lijn met de methodiek zoals beschreven in Pesenti et al (2019), maar dan toegepast voor waardering in plaats van kapitaalberekeningen.



### Voorbeeld 1: dobbelsteen

Bovenstaande methode kan geïllustreerd worden met een simpel voorbeeld. Stel dat we geïnteresseerd zijn in het verwachte gemiddeld aantal ogen wanneer we gooien met een dobbelsteen. In experiment 1 wordt dit benaderd door 600 maal te gooien met een zuivere dobbelsteen (waarbij iedere kant een kans van 1/6 heeft) en op basis daarvan het gemiddeld aantal ogen te berekenen (zie tabel 1).

Stel nu dat we als gevoeligheidsanalyse ditzelfde experiment willen doen maar nu met een onzuivere dobbelsteen, waar de kans op 6 gelijk is aan 3/8 en de andere kansen gelijk aan 1/8. Hiertoe kan opnieuw 600 maal gegooid worden, maar nu met de onzuivere dobbelsteen (experiment 2). Echter, dit kan ook vermeden worden door de resultaten van experiment 1 te gebruiken en die te wegen conform de hierboven beschreven methode (experiment 3). Dat betekent dat het gewicht voor 6 ogen gelijk is aan  $\frac{3}{8} / \frac{1}{6} = \frac{9}{4}$  en voor de overige  $\frac{1}{8} / \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$ .

Tabel 1 laat zien dat dit hetzelfde resultaat oplevert als experiment 2, maar dan zonder de noodzaak om 600 maal opnieuw te gooien met de dobbelsteen.

Experiment 1	1	2	3	4	5	6
Kans	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Aantal	100	100	100	100	100	100
$E[\#ogen] = \frac{100 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)}{600} = 3.5$						
Experiment 2	1	2	3	4	5	6
Kans	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	3/8
Aantal	75	75	75	75	75	225
$E[\#ogen] = \frac{75 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + 225 \times 6}{600} = 4.125$						
Experiment 3	1	2	3	4	5	6
Kans	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	3/6
Aantal	100	100	100	100	100	100
Gewicht	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	9/4
$E[\#ogen] = \frac{100 \times ((3/4) \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (9/4) \times 6)}{600} = 4.125$						

Tabel 1: resultaten voorbeeld 1 - dobbelsteen

Prof. dr. A.A.J. Pelsser HonFIA (links) en dr. H.J. Plat AAG RBA zijn partners van Risk at Work en geven in die hoedanigheid advies aan verzekeraars, banken en pensioenfondsen op het gebied van waardering en risicomanagement.



### Voorbeeld 2: Hull-White rentemodel

Een meer representatief voorbeeld kan gegeven worden op basis van het stochastische proces onderliggende aan het Hull-White rentemodel, waarbij de spotrente  $r_t$  wordt beschreven door:

$$dr_t = \alpha(\theta(t) - r_t)dt + \sigma dW_t$$

waarbij de deterministische functie  $\theta(t)$  wordt gebruikt om het Hull-White model te fitten aan de initiële rente termijnstructuur. De risiconeutrale waarde van een stroom van stochastische cashflows  $C_t$  wordt berekend als:

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t r_s ds} C_t dt \right]$$

Als we  $N$  scenariopaden genereren van rentes  $(r_{\Delta t, n}, r_{2\Delta t, n}, \dots, r_{J\Delta t, n})$  dan kunnen we de risiconeutrale waarde van de payoff  $G(r)$  benaderen als:

$$\mathbb{E}[G(r)] = \mathbb{E} \left[ \int_0^T e^{-\int_0^t r_s ds} C_t dt \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( \sum_{j=1}^J e^{-\sum_{k=0}^{j-1} r_{k\Delta t, n} \Delta t} C_{j\Delta t}(r_0, \dots, r_{J\Delta t, n}) \Delta t \right)$$

Ter illustratie van de methodiek, stel dat de impact van een schok op de huidige rente termijnstructuur op de risiconeutrale waarde  $\mathbb{E}[G(r)]$  bepaald moet worden. De geschokte rentecurve kunnen we in het Hull-White modelleren als een schok  $\theta(t) + \delta(t)$ . Dit impliceert dat de impact van de schok op de rentecurve gezien kan worden als een verandering in de kansverdeling van de  $r_t$ -tjes die beschreven wordt door de schok-functie  $\delta(t)$ .

In het Hull-White model kan de likelihood ratio expliciet bepaald worden als:

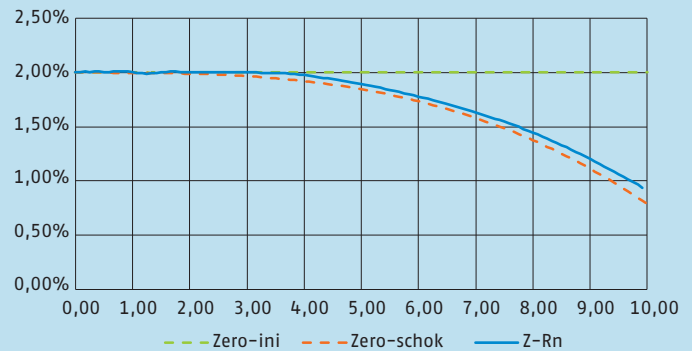
$$R_n = \frac{f_{\theta+\delta}(r_n)}{f_{\theta}(r)} = \mathcal{C} \exp \left\{ \sum_{j=0}^J \lambda(j\Delta t) r_{j\Delta t, n} \Delta t \right\}$$

waarbij  $\lambda(t)$  een deterministische functie is die alleen afhangt van de schok-functie  $\delta(t)$  en  $\mathcal{C}$  een constante is die waarborgt dat  $\sum_{n=1}^N R_n / N = 1$ . Met bovenstaande gewichten kan de impact op de verwachte payoff als volgt berekend worden:

$$\mathbb{E}_{\delta}[G(r)] \approx \sum_{n=1}^N \frac{R_n}{N} \left( \sum_{j=1}^J e^{-\sum_{k=0}^{j-1} r_{k\Delta t, n} \Delta t} C_{j\Delta t}(r_0, \dots, r_{J\Delta t, n}) \Delta t \right)$$

Zoals blijkt uit de formule is de enige verandering ten opzichte van de basiswaardering de toegevoegde gewichten  $R_n$ , wat betekent dat de simulatie van de rentepaden en de cashflows per rentepad niet herhaald hoeven te worden. Merk ook dat de gewichten  $R_n$  alleen afhangen van de rentepaden en niet van de payoff. We kunnen dus verschillende payoffs waarderen met behulp van dezelfde gewichten  $R_n$ .

Figuur 1 laat de effectiviteit van de methode zien. We hebben  $N = 1000$  rentepaden gegenereerd met behulp van een Hull-White model met initiële rente termijnstructuur vlak op 2%. Deze initiële curve is weergegeven met de grijze stippellijn. Vervolgens berekenen we voor de 1000 paden de gewichten  $R_n$  om de schok naar de oranje curve te bepalen. De blauwe lijn is de weergave van de gesimuleerde discountbond-prijzen o.b.v. de oorspronkelijke paden herwogen met de gewichten  $R_n$ . We zien dat de gesimuleerde discountbond-prijzen bijna hetzelfde zijn als de oranje stippellijn. De afwijkingen tussen de blauwe en oranje lijn zijn het gevolg van de Monte-Carlo benadering met een eindig aantal van 1000 paden.



**Figuur 1:** Waardering van cashflows met herwogen in Hull-White model

### MEER COMPLEXE SCENARIOMODELLEN

De likelihood ratio methode zoals hierboven beschreven vereist dat de verdeling van de onderliggende risicofactoren in closed form geschreven kan worden. Dit is niet altijd het geval, zoals bijvoorbeeld voor meer complexe scenariomodellen. Echter, als de momenten van de verdeling wél bekend zijn, kunnen de gewichten numeriek worden bepaald zodanig dat de momenten van de Monte Carlo benadering (inclusief geoptimaliseerde gewichten) hieraan gelijk zijn (zie ook Pesenti et al (2019)).

### CONCLUSIES

De hierboven beschreven methode maakt het mogelijk om gevoeligheidsanalyse uit te voeren op de waarde van embedded opties in verzekerings- en pensioencontracten, zonder telkens opnieuw de kasstromen te hoeven simuleren. Dit is vooral van toegevoegde waarde wanneer het simuleren van de verplichtingen veel doorlooptijd en reken capaciteit vergt, wat in de praktijk vaak het geval is. ■

### Referenties

Pesenti, S. M., Millosovich, P., & Tsanakas, A. (2019). Reverse sensitivity testing: What does it take to break the model? *European Journal of Operational Research*, 274(2), 654-670.